Resumen de estructuras algebraicas

Dado un conjunto E:

Una **ley de composición interna** sobre E es una aplicación:

$$\begin{array}{l} E \times E \rightarrow E \\ (x,y) \rightarrow z \end{array}$$

al elemento z se le llama *compuesto* de x e y, denotándosele habitualmente como x+y, x.y, x*y, …..

Una **ley de composición externa** sobre E con *dominio de operadores* el conjunto K es una aplicación:

$$\begin{array}{l} K \times E \rightarrow E \\ (\alpha,x) \rightarrow s \end{array}$$

al elemento s se le denota habitualmente como $\alpha \cdot x$

Una **estructura algebraica** es un conjunto E dotado de una o varias leyes de composición. Según las propiedades que verifiquen estas leyes de composición la estructura algebraica recibe nombres especiales. Indicaremos las más destacadas

Un conjunto G con una ley de composición interna * es un **grupo** si:

1) La ley * es <u>asociativa</u>: $\forall\, a,b,c \in G \quad a*(b*c)=(a*b)*c$
2) <u>Existe elemento neutro</u>: $\forall\, a \in G \quad \exists!\, e \in G \;/\; a*e=e*a=a$
3) <u>Todo elemento tiene simétrico</u>: $\forall\, a \in G \quad \exists!\, a' \in G \;/\; a*a'=a'*a=e$

(G,*) es un **grupo abeliano o conmutativo** si además la ley * es <u>conmutativa</u>: $\forall\, a,b \in G \quad a*b=b*a$

Un conjunto A con dos leyes de composición interna: $*$, $\perp$ es un **anillo** si:

1) (A,*) es un grupo abeliano
2) La ley $\perp$ es <u>asociativa</u>: $\forall\, a,b,c \in A \quad a\perp(b\perp c)=(a\perp b)\perp c$
3) La ley $\perp$ es <u>distributiva respecto a *</u>:

$$\forall\, a,b,c \in A \quad \begin{cases} a \perp (b * c)=(a \perp b) * (a \perp c) \\ (a * b) \perp c=(a \perp c) * (b \perp c) \end{cases}$$

$(A,*,\perp)$ es un **anillo conmutativo** si además la ley $\perp$ es <u>conmutativa</u>:

$$\forall\, a,b \in A \quad a\perp b=b\perp a$$

$(A,*,\perp)$ es un **anillo unitario** si además <u>existe elemento neutro</u> u para la ley $\perp$

$$\forall\, a \in A \quad \exists!\, u \in A \;/\; a\perp u=u\perp a=a$$

Un conjunto K con dos leyes de composición interna: $+$, $\times$ es un **cuerpo** si:

1) $(K,+,\times)$ es un anillo conmutativo y unitario
2) Si 0 es el elemento neutro para $+$ y 1 es el elemento neutro para $\times$, todo elemento de K-{0} tiene simétrico para $\times$:
$$\forall a \in K-\{0\} \quad \exists!\, a^{-1} \in K \ / \ a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = 1$$

Un conjunto E con una ley de composición interna $+$ y una ley de composición externa $\cdot$ con dominio de operadores el cuerpo $(K,+,\times)$, es un **espacio vectorial sobre K** si:

1) $(E,+)$ es un grupo conmutativo
2) $\forall x,y \in E$, $\forall \alpha \in K$ $\quad \alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
3) $\forall x \in E$, $\forall \alpha, \beta \in K$ $\quad (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
4) $\forall x \in E$, $\forall \alpha, \beta \in K$ $\quad (\alpha \times \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$
5) $\forall x \in E$ $\quad 1 \cdot x = x$ (donde 1 es el elemento neutro para $\times$ en K)

es habitual denominar a los elementos de E *vectores* y a los de K *escalares*.